Tema 4. Continuidad, límites y derivadas

Una función, $f : A \to \mathbb{R}$, definida en un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se dice que es **continua** en un punto $a \in A$ cuando se verifica que:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a+\delta \\ x \in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x)-f(a)| < \varepsilon$$

Esta definición puede interpretarse suponiendo que estás midiendo un valor a de una magnitud, y que vas a usar dicho valor para obtener, mediante una ley física dada por la función f, el valor de otra magnitud $f(a)$. Como los errores de medida son inevitables, para que esa ley física sea útil, debe ocurrir que pequeños errores en las medidas no den lugar a grandes cambios en los valores de f, esto es lo que expresa la definición anterior. En ella, el número $\varepsilon > 0$ es una cota de error en el resultado final que aceptamos como admisible, el número $\delta > 0$ indica la precisión con la que tenemos que medir el dato a para que el error final sea menor que ε. Cuando *cualquiera* sea el $\varepsilon > 0$, siempre es posible medir a con suficiente precisión $\delta > 0$ para que el error final sea menor que ε, se dice que la función es continua en a.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a-\delta < x < a+\delta$ por $a-\delta < x \leqslant a$ (resp. por $a \leqslant x < a+\delta$), se dice que f es **continua por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a.

Observación importante. *Para poder hablar de la continuidad o de la no continuidad de una función en un punto, la función debe estar definida en dicho punto.*

Observa que en la definición de continuidad el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasar a f fuera de A no nos interesa.

Se dice que f es continua en A, si f es continua en todo punto de A.

Propiedades de las funciones continuas

- *Las funciones suma y producto y cociente de funciones continuas son funciones continuas.*
- *La composición de funciones continuas es una función continua.*
- *Todas las funciones elementales son continuas en sus dominios naturales de definición.*

Teorema del valor intermedio. *El rango o recorrido de una función* ***continua*** *en un* ***intervalo*** *es un intervalo.* Es decir, si f es una función *continua* definida en un *intervalo* I, a y b son puntos de I, entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

En particular, deducimos el **teorema de Bolzano**: si f es continua en un intervalo I, a y b son puntos de I tales que $f(a)f(b) < 0$, entonces f se anula en algún punto comprendido entre a y b.

Una consecuencia del teorema de Bolzano es que *toda función polinómica de grado impar tiene alguna raíz real.*

Extremos absolutos

- Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **máximo absoluto** si hay algún punto $v \in A$ tal que $f(x) \leqslant f(v)$ para todo $x \in A$.
- Se dice que una función $f : A \to \mathbb{R}$ alcanza en A un **mínimo absoluto** si hay algún punto $u \in A$ tal que $f(u) \leqslant f(x)$ para todo $x \in A$.

Teorema de Weierstrass de existencia de extremos absolutos. *Toda función continua en un intervalo* ***cerrado y acotado*** *alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos.*

Equivalentemente, el recorrido de una función continua f en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, es también un intervalo cerrado y acotado: $f\big([a,b]\big) = [m,M]$.

Una consecuencia del teorema de Weierstrass es que *una función polinómica de grado par cuyo coeficiente líder es positivo alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$, y si el coeficiente líder es negativo alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$.*

Idea intuitiva de límite de una función en un punto. La función $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ no está definida en $x = 0$, pero si damos a x valores próximos a cero obtenemos

$$f(0{,}04) = 0{,}999733,\ f(0{,}03) = 0{,}99985,\ f(0{,}02) = 0{,}999933,\ f(0{,}01) = 0{,}999983$$

y comprobamos que cuanto más nos acercamos al valor $x = 0$, el valor de la función se acerca cada vez más a 1. Esto lo expresamos matemáticamente de la forma

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Límite de una función en un punto. Sea I un intervalo, $a \in I$, y f una función que suponemos definida en $I \setminus \{a\}$. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in I,\ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x < a$ (resp. por $a < x < a + \delta$), se dice que f tiene **límite por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a. Dichos límites se representan simbólicamente por $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = L$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = L$).

Relación entre límite y continuidad. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Se verifica que f es continua (por la derecha, por la izquierda) en a si, y sólo si, f tiene límite (por la derecha, por la izquierda) en a y dicho límite es igual a $f(a)$.

Clasificación de las discontinuidades. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:
  $$\lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$$
  se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

Funciones divergentes en un punto (asíntotas verticales). Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a + \delta \\ x \in I,\ x \neq a \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Si en la definición anterior sustituimos la condición $a - \delta < x < a + \delta$ por $a - \delta < x < a$ (resp. por $a < x < a + \delta$), se dice que f es **positivamente divergente por la izquierda** (resp. **por la derecha**) en a. Y simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty$.

Si en la definición anterior cambiamos $+\infty$ por $-\infty$ entonces tenemos las definiciones de **negativamente divergente** en a que se expresan simbólicamente por

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)=-\infty, \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=-\infty$$

Límites en infinito (asíntotas horizontales). Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I=[c,+\infty[$. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L\in\mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+ \quad \exists K\in\mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x>K \\ x\in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x)-L|<\varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en $+\infty$**, y escribimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Funciones divergentes en infinito. Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función definida en un intervalo $I=[c,+\infty[$. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M\in\mathbb{R}^+ \quad \exists K\in\mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x>K \\ x\in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x)>M$$

En cuyo caso escribimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

Análogamente se define el significado de:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

Álgebra de límites. Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x), \quad \lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)\lim\limits_{x\to a} g(x)$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

iii) Si $f(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to a} g(x)$

Funciones asintóticamente equivalentes. Se dice que dos funciones f y g son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, y escribimos $f(x)\sim g(x)(x\to a)$, cuando $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

Para calcular el límite de un producto o de un cociente de dos funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente.

Límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de una función racional

Sea $P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n$ una función polinómica. De la igualdad

$$\frac{P(x)}{x^n}=c_n+\frac{c_{n-1}}{x}+\frac{c_{n-2}}{x^2}+\cdots+\frac{c_1}{x^{n-1}}+\frac{c_0}{x^n}$$

Se deduce

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{x^n}=c_n$$

Y por tanto $P(x) \sim c_n x^n$ para $x \to \pm\infty$.

Sea $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ otra función polinómica. Tenemos que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{c_n x^n}{b_m x^m} = \frac{c_n}{b_m} x^{n-m} \qquad (x \to \pm\infty)$$

Suponiendo que $\frac{c_n}{b_m} > 0$, deducimos que:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \quad n-m \text{ par} \\ -\infty, & n > m \quad n-m \text{ impar} \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} +\infty, & n > m \\ \dfrac{c_n}{b_m}, & n = m \\ 0, & m > n \end{cases}$$

Escala de infinitos

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\mu}{x^\alpha} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x^\alpha \left|\ln x\right|^\mu = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\mathrm{e}^{\mu x}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu > 0$.

Derivadas

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable “dependiente” y con otra variable “independiente” x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La *razón de cambio promedio* de $y = f(x)$ con respecto a x en el intervalo $[a, x]$ es:

$$\text{Razón de cambio promedio } = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar *razón de cambio puntual* de $y = f(x)$ con respecto a x en el punto a como:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Velocidad instantánea. El ejemplo más conocido de esto que decimos es el de un móvil que se mueve en una recta en la que se ha señalado un origen, de modo que en el tiempo t, medido en segundos, su posición, medida en metros, viene dada por una función $f(t)$. La velocidad media del móvil, medida en metros por segundo, en un intervalo de tiempo de t a t_0 viene dada por

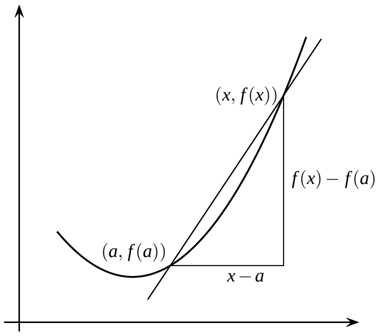
$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños llegamos al concepto de “velocidad instantánea”, $v(t_0)$, que sería la velocidad que tiene el móvil en el *instante* t_0. Se trata de un concepto teórico de gran utilidad para estudiar el movimiento, pero no puede medirse porque un instante no tiene duración. Su formulación matemática es

$$v(t_0) = \lim_{t\to t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

Observa que el cociente $\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ no está definido para $t = t_0$.

Secantes y tangentes.



Supongamos que queremos hallar la recta tangente a una curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. En principio, parece que nos falta un dato ya que una recta no queda determinada por un solo punto. Para determinar una recta necesitamos dos puntos o un punto y la pendiente. La estrategia consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente.

Consideremos la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta a la curva, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Cuando el punto x se aproxima *"infinitamente"* al punto a, la **pendiente de la tangente** vendrá dada por:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Derivada de una función en un punto

En lo que sigue la letra I representará un intervalo de números reales. Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Dicho límite se llama **derivada de** f **en** a y lo representaremos por $f'(a)$.

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.

Rectas tangente y normal. Supuesto que f es derivable en a, la recta de ecuación cartesiana:

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x - a)}$$

se llama **recta tangente** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

Cuando $f'(a) \neq 0$, la recta de ecuación:

$$\boxed{y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a)}$$

es la **recta normal** a la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.

Derivadas de sumas, productos y cocientes. Las funciones suma, $f+g$, y producto, fg, son derivables en todo punto $a\in I$ en el que f y g sean derivables, y sus derivadas respectivas vienen dadas por:

$$(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

La función cociente f/g es derivable en todo punto $a\in I$ en el que f y g sean derivables y $g(a)\neq 0$, en cuyo caso se verifica que:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Las funciones elementales son derivables en todo punto de su dominio natural de definición.

Derivación de una función compuesta o regla de la cadena. Sean $f: I\to\mathbb{R}$ y $g: J\to\mathbb{R}$ con $f(I)\subset J$, y sea $h=g\circ f: I\to\mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a\in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y

$$h'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particular, la composición de funciones derivables es una función derivable.

La regla práctica es que una composición de funciones se deriva de forma inversa a como se evalúa.

$$(u\circ v\circ w)'(x) = u'(v(w(x))v'(w(x))w'(x)$$

Criterio de equivalencia logarítmica. Este resultado es muy útil y permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “0∞”.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$. Entonces se verifica que:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^L \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = L}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = +\infty \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0 \iff \lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1) = -\infty}$$

Derivación logarítmica

Si f y g son derivables la función $\psi(x)=g(x)^{f(x)}$ también es derivable. Derivando la función

$$\ln(\psi(x)) = f(x)\ln(g(x))$$

se obtiene:

$$\boxed{\psi'(x) = \psi(x)\left(\ln(g(x))f'(x)+f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right)}$$

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f: I\to\mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a\in I$ un **máximo relativo** si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1) Hay algún número $r>0$ tal que $]a-r,a+r[\subset I$.

2) Para todo $x\in]a-r,a+r[$ se verifica que $f(x)\leqslant f(a)$.

Si para todo $x \in]a-r, a+r[$ con $x \neq a$ se verifica que $f(x) < f(a)$ se dice que f tiene en a un **máximo relativo estricto**.

Análogamente se define el concepto de **mínimo relativo** y de **mínimo relativo estricto**.

La expresión **extremo relativo** se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un *extremo relativo* en a y que f *es derivable en* a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

La función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3$, es estrictamente creciente, es derivable en todo punto y su derivada solamente se anula en $x = 0$. Tiene un mínimo absoluto en -1 y un máximo absoluto en 1; dichos puntos no son extremos relativos de la función. Este ejemplo también muestra que *la condición necesaria de extremo relativo no es suficiente*.

Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** de dicha función.

Teorema del valor medio. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$. Entonces existe algún punto $c \in]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En particular, deducimos el **teorema de Rolle**: si $f(a) = f(b)$ obtenemos que la derivada de f se anula en algún punto $c \in]a, b[$.

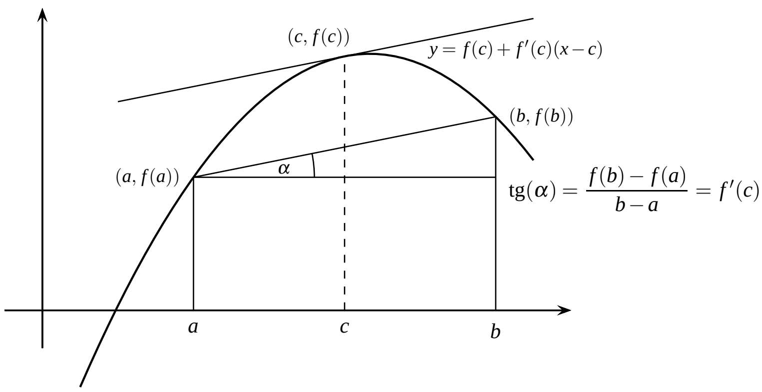


Figura 1: Teorema del valor medio

Consecuencias del teorema del valor medio

Sea f una función **derivable en un intervalo** I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces para todos $x, y \in I$ se verifica que

$$\boxed{|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|}$$

En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

Derivabilidad y monotonía. Sea f una función **derivable en un intervalo** I.

- Si para todo $x \in I$ es $f'(x) > 0$ entonces f es estrictamente creciente en I.
- Si para todo $x \in I$ es $f'(x) < 0$ entonces f es estrictamente decreciente en I.

Criterio de extremo absoluto. Sea f una función **derivable en un intervalo** I, **cuya derivada se anula en** I **en un único punto** $c \in I$. Supongamos que hay puntos $a, b \in I$ tales que $a < c < b$. Entonces se verifica que

- Si $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$, f alcanza en c un mínimo absoluto estricto en I.
- Si $f'(a) > 0$ y $f'(b) < 0$, f alcanza en c un máximo absoluto estricto en I.

Derivación de la función inversa. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ **derivable en un intervalo** I **con** $f'(x) \neq 0$ **para todo** $x \in I$. Entonces f **es una biyección** de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la **función inversa** $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ **es derivable** en J siendo para todo $y \in J$:

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}}$$

La fórmula anterior se recuerda sin más que derivar la identidad:

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = y$$

Como ejemplo podemos calcular las derivadas de las funciones trigonométricas "inversas".

$$\operatorname{arc sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1), \quad \operatorname{arc tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Reglas de L'Hôpital. Sean $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a, b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a, b[$. Sea $\alpha \in \{a, b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:

- $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \alpha} |g(x)| = +\infty$

Y además

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

Entonces se verifica que

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Derivadas de orden superior. Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es *n veces derivable en un punto $a \in I$*, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1}$ es derivable en a.

Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n}$ es continua en I.

Se dice que f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos órdenes en I.

Por convenio se define $f^{(0} = f$.

Condiciones suficientes de extremo relativo. Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden $n-1$ inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k}(a) = 0$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$, y que $f^{(n}(a) \neq 0$. Entonces:

- Si n es par y $f^{(n}(a) > 0$, f tiene un *mínimo **relativo** estricto* en a.
- Si n es par y $f^{(n}(a) < 0$, f tiene un *máximo **relativo** estricto* en a.
- Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Este resultado es útil para estudiar extremos relativos pero ***no proporciona condiciones suficientes de extremo absoluto***.

Polinomios de Taylor. Sea f una función n veces derivable en un punto a. La función polinómica $T_n(f,a)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$\boxed{T_n(f,a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k}$$

se llama el **polinomio de Taylor de orden n de f en a**.

Teorema de Taylor. Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$\boxed{f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Suele llamarse *resto de Lagrange* al número:

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}}$$

Si para una función dada y para valores concretos de a, x, n y $\varepsilon > 0$, podemos probar que para todo t comprendido entre a y x se verifica que

$$\frac{|f^{(n+1)}(t)|}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \leqslant \varepsilon$$

Entonces podemos asegurar que $|f(x) - T_n(f,a)(x)| < \varepsilon$, es decir, **el error cometido al aproximar $f(x)$ por $T_n(f,a)(x)$ es menor que ε**.

Funciones convexas y funciones cóncavas. Se dice que una función es **convexa** en un intervalo I si el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de f en I queda siempre por encima de la gráfica de f.

Se dice que una función es **cóncava** en un intervalo I si el segmento (la cuerda) que une dos puntos de la gráfica de f en I queda siempre por debajo de la gráfica de f.

Ejemplos típicos de funciones convexas son las parábolas "hacia arriba" y la exponencial. Ejemplos típicos de funciones cóncavas son las parábolas "hacia abajo" y el logaritmo.

Condiciones suficientes de convexidad. Supongamos que f es derivable en un intervalo I. Si la derivada de f es creciente (resp. estrictamente creciente) en I entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en I.

En particular si f es dos veces derivable en I y se verifica que $f''(x) \geqslant 0$ (resp. $f''(x) > 0$) para todo $x \in I$, entonces f es convexa (resp. estrictamente convexa) en I.

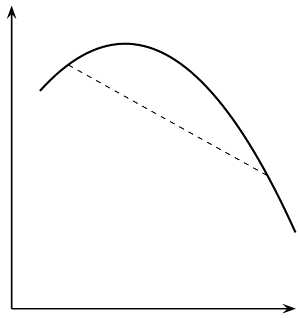


Figura 2: Función cóncava

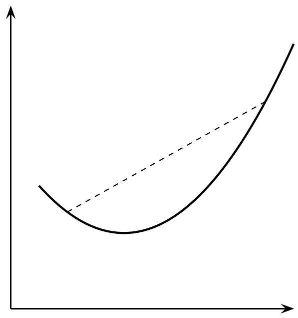


Figura 3: Función convexa

Interpretando la derivada primera como la velocidad y la derivada segunda como la aceleración, las curvas convexas aceleran y las cóncavas frenan.

Puntos de inflexión. Se dice que a es un **punto de inflexión** de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.

Condición necesaria:

Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a) = 0$.

Condición suficiente:

Si f es tres veces derivable en un punto a y se tiene que $f''(a) = 0$ pero $f'''(a) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en a.